

A mindennapi élet matematikája

Minden helyesen megválasztott pedagógiai célrendszernek tartalmaznia kell a társadalmi cselekvőképesség kialakításának igényét is. Ezen megfontolás alapján az oktatás folyamatában elsőbbséget kell kapnia az olyan képességfejlesztő tevékenységeknek, amelynek során azokat a képességeket erősítjük, illetve gyakoroltatjuk, amelyekre a mindennapi élet legkülönbözőbb tevékenységei, a produktív és a reprodukzív jellegű cselekvések esetében általában szükség van.

A kötelező oktatás tartalmi szabályozásakor, a NAT-ban képviselt értékek, az egységes, alapvető követelmények és az ezekre épülő differenciálás egyaránt azt a célt szolgálják, hogy a tanulók – adottságaikkal, fejlődésükkel, iskolai és iskolán kívüli tanulásukkal, egyéb tevékenységeikkel, szervezett és spontán tapasztalataikkal összhangban – minél teljesebben bontakoztathassák ki személyiségüket. A különböző ismeretek elsajátítása eszköz a tanulók értelmi, önálló ismeretszerzési, kommunikációs, cselekvési képességeinek a kialakításához, fejlesztéséhez. (1)

Matematikából az általános fejlesztési követelmények között egyrészt az elsajátított matematikai fogalmak alkalmazásai között a matematika elemi fogmainak a mindennapi életben való használata, másrészt az elsajátított megismerési módszerek és gondolkodási műveletek alkalmazásai között a mindennapi életből s a matematikából vett egyszerű állítások igaz vagy hamis voltának eldöntése (2) szerepel a Nemzeti alaptantervben.

Tanítványaink személyiségének fejlesztéséből a matematika tanulására – tanítására háruló feladatokat nagy valószínűséggel hiányosan és egészen biztosan eltorzítva teljesítjük, ha figyelmünket csak a követelményként megfogalmazott ismeretekre (netán csak a minimum követelményekre) koncentráljuk. A tananyagban a követelmények között nem szereplő részeknek is jelentős szemléletformáló, logikus gondolkodást, problémamegoldó képességet, kreativitást (eredetiséget, problémaérzékenységet, ötletgazdagságot, rugalmasságot) fejlesztő szerepe van.

A különböző matematikatanítási irányzatok ismertetéséhez készült kommentárjai között fogalmazta meg Kárteszi professzor az alkalmazásorientált matematikaoktatással kapcsolatban a következőket: „Általános és középiskolai matematikatanításunk a matematikának, a matematikán kívüli alkalmazása területén komoly hiányosságokkal rendelkezik. Nem szabad elszakadnia a matematikának a valóságtól, így sokkal jobban érdekli a gyereket is; a valódi szituációkkal, problémákkal foglalkozó matematikaoktatás fokozza a tanulók érdeklődését. Vigyázni kell persze arra is, hogy ne mesterkélt példákat elemezzünk. Időigényes, de megéri a fáradságot! A fűszerezés szerepét tölti be a matematikatanításban.” (3) A helyzet ma is ugyanez. Napjainkban is indokolt a gyakorlatias irányultságú, a mindennapi életvitellel kapcsolatos feladatok kitűzésének, megoldásának szükségességéről beszélnünk.

Tanítványaink megismerési tevékenysége az iskolán, a tanítási órákon kívül is funkcionál. A művelődés, a kultúra birtokbavétele nem szűkíthető le az intézményes fejlesztés negyvenöt perceire. Ezért indokoltak tartok a készségfejlesztésben olyan fejlesztő szintézist, amelyben gyakorlatias irányultságú ismeretanyagot dolgoznak fel.

Különböző gyakorlati problémák megoldása tanítványaink későbbi életében legtöbbször nem elszigetelt szaktárgyi kérdésként merül fel. Természeti és társadalmi környezetünk, a valóságos élet egységes egész. Ezért a tanuló önkéntelenül is törekszik arra, hogy a tantárgyi keretben szerzett ismereteit integrálja, egységbe szervezze. Ez nem könnyű feladat. Természetes, hogy nevelőinek kötelessége lehetőleg minél több

segítséget biztosítani ahhoz, hogy ez a folyamat sikeres legyen.

Az általános iskolai matematikatanítás eredményességének egyik fontos feltétele, hogy a szóba kerülő ismereteket a valóságból merített, gyakorlatias példák alapján, kellően szemléltetve dolgozzuk föl.

Írásom témájának választását a tantárgyi ismeretanyag és a fentiekben említett fontos szempont összekapcsolási lehetőségének bemutatása indokolja, feldolgozásának módját pedig az a tény, hogy meggyőződésem szerint a gyakorló pedagógusok az elméleti fejtegetéseknél többet profitálnak a konkrét alkalmazások bemutatásából.

Mennyiségek és mérésük

A mennyiségek becslése, mérése az egyik legjellemzőbb emberi tevékenység. Csecsemőkorban már mérícskél a gyermek (kicsi baba – nagyobb baba), és élete végéig többször hasonlítja össze a mennyiségeket, mint ahányszor számtani műveletet végez. A mérés az ismeretszerzés egyik legfontosabb módja.

Mennyiségek összehasonlításával kezdjük a mérési tapasztalatok szerzését az általános iskolában. Ehhez a környezet tárgyai olyan tulajdonságainak megfigyelése, vizsgálata, összehasonlítása, kapcsolataik felismerése lehet az első lépés, amelyek a tárgyak térbeli kiterjedésére (magasság, hosszúság, szélesség), tömegére, tartalomra vonatkoznak.

Két mennyiséget összehasonlíthatunk ránézéssel, de emlékezetből is. Az összehasonlításnak nem feltétele, hogy egymás mellett legyenek, sőt még az sem, hogy azonos időpontban lássuk ezeket a mennyiségeket. Gondoljunk két út szélességére, amelyeken átmertünk, két pohár tejre, amit megittunk. Az összemérésnek viszont már feltétele, hogy a két mennyiség térben és időben együtt legyen. Mértékegység nem kell az összeméréshez sem. Összeméréssel csak azt állapítjuk meg, hogy melyik mennyiség nagyobb, melyik kisebb, esetleg ugyanakkorák, de mérőszámot még nem használunk. Minden mérésnél a mérendő mennyiséget azonos fajtajú mennyiséggel hasonlítjuk

össze. A hosszúságot hosszúsággal, a területet területtel, a térfogatot térfogattal, a tömeget tömeggel, az időtartamot időtartammal, a szöget szöggel mérjük. Hogy éppen mekkorával? Az a mértékegység választásától függ.

A mértékegység választás szempontjai:

- összemérhető legyen a mérendő mennyiséggel (nagyságrend);
- környezeti hatásoknak ellenálló anyagból legyen (nem célszerű tömegegységet normális hőmérsékleten és nyomáson erősen szublimáló anyagból, például kámforkristályból készíteni);
- könnyen hozzáférhető legyen (ne készüljön drága, ritka anyagból).

Elvileg a mértékegységek szabadon választhatók (a tanítványainkkal is alkalmilag választott egységekkel kezdjük a mérést), azonban a fontosabb mértékegységeket az egységesség érdekében nemzetközi megállapodások rögzítik (szabványos mértékegységek).

Minden mérés elvégzéséhez szükség van:

- mértékegységre;
- mérőeszköze (ez lehet az egységül választott tárgy is);
- mérési utasításra (miként kell a mérőeszközt használni).

A méréssel kapott eredmény a valódi mértéknek csak közelítő értéke. Nem mindegy, hogy milyen mértékegységet választunk, milyen mérőeszközt használunk. Célszerű tanítványaink szemléletét a következő tények elfogadása felé terelnünk:

- a mérés mindig összehasonlítás;
- a mérés eredménye mindig csak közelítően pontos;
- a méréshez aszerint választunk egységet, hogy milyen pontosságra van szükségünk a gyakorlatban;
- a mérés pontossága végrehajtásának szakszerűségétől, gondosságától is függ, valamint attól is, hogy milyen mérőeszközt használunk.

Tanítványaink csak elegendő mérés elvégzése következtében (mérési tapasztalatokat csak a mérőeszközök tényleges használatával szerezhethetnek!) tapasztalhatják, érthetik meg, hogy a gyakorlatban a mérés sohasem lehet pontos. Nem mindegy vi-

szont, hogy a mérési hiba objektív vagy szubjektív eredetű. Például egyszerű hosszúságmérésnél a gondatlanság az úgynevezett parallaxishibához vezethet. Ugyanis, ha a mérendő tárgy nem közvetlenül a mérőrud skálája mellett van, akkor leolvasásnál a szemünket és a tárgy végpontját összekötő szakasznak a skálára mérőlegesnek kell lennie, mert ferde irányból végzett leolvasás a mérendő tárgy végpontjának látszólagos eltolódását eredményezi.

Helyes, ha konkrét helyzetben a tanulók maguk döntenek a mérés szükségése, illetve célszerű pontosságáról. A mértékegység választását is bízzuk a tanulókra, majd beszéljük meg velük, hogy helyesen döntöttek-e. Beszéltesük a gyerekeket. Mondják el, hogyan használják a mérőeszközt, mit csinálnak. A matematikában alapvető szerepe van a szabatos fogalmazásnak. A pedagógus szavainak ismétlésénél rendszerint jobban fejleszti a tanulókat saját gondolataik megfogalmazása, esetleges pontatlan kifejezéseik szembevetése a tényekkel.

A mérésnél különbséget teszünk a megmérés (valaminek megállapítani az adott mértékegységhez tartozó mérőszámát) és a kimérés (valamiből „kimérni” adott mennyiséget, például a kosár narancsból 2 kg-nyit) között. Tanítványaink valóságérzetének erősítéséhez mindkét típusú tevékenységre szükség van. A becslésnél is fontos a mindkét típusú tevékenység gyakorlása. Táblára (füzetbe) rajzolt vonal hosszának becslése és adott hosszúságú vonal mérőeszköz nélküli rajzolása egyaránt előfordul a helyesen vezetett matematikaórákon.

A becslési készség fejlettségének, a reális becsléseknek nagyon sokféle munkaterületen van jelentős szerepe (tervek készítésekor, munkaszervezési problémák megoldásakor). A jó becslési képesség nem magától alakul ki. Jól becsülni a távolságot, a tömeget, az időtartamot stb. az tudja, aki ezt sokszor gyakorolja. A becslés csak mérési tapasztalatokra támaszkodhat. A mérésakor szerzett tapasztalatok összegződése, a rendszeres viszonyítás biztosítja a tanulók mennyiségi élményét. Becsléskor lényegében ezeket az élményeket kell felidézni.

Ennek hiányában nem beszélhetünk becslésről, csak találgatásról. Találgat a tanuló, ha még nem érzékelt tudatosan 10 dkg-nyi, fél kg-nyi, 2 kg-nyi tömeget, mégis azt várjuk tőle, hogy helyesen érzékelye valamely tárgy tömegét. Becslés csak azoktól a tanulóktól várható el, akik már több mérési tapasztalatot szerezhettek ilyen tömegek érzékelésére, mennyiségi élmények gyűjtésére. A becslés hasznos, értékes része a mérési folyamatnak, mert fejleszti a mérést végző személy mennyiségi érzékét. A találgatás pedig ha-

szontalan, felesleges időtöltés.

Tanítványaink mérést igénylő problémákhoz való hozzáállásával akkor lehetünk elégedettek, ha már tudatosan alkalmazzák a következő sorrendet:

- a mérendő mennyiség becslése;
- a mérés elvégzése;
- a mérés eredményének a becsült értékkel való összehasonlítása.

A mérések ismeretanyagának tanításakor különösen fontos annak a ténynek a szem előtt tartása, hogy a személyes, cselekvő tapasztalatszerzést soha nem pótolja tökéle-

A becslési készség fejlettségének, a reális becsléseknek nagyon sokféle munkaterületen van jelentős szerepe (tervek készítésekor, munkaszervezési problémák megoldásakor).
A jó becslési képesség nem magától alakul ki. Jól becsülni a távolságot, a tömeget, az időtartamot stb. az tudja, aki ezt sokszor gyakorolja.
A becslés csak mérési tapasztalatokra támaszkodhat. A mérésakor szerzett tapasztalatok összegződése, a rendszeres viszonyítás biztosítja a tanulók mennyiségi élményét.
Becsléskor lényegében ezeket az élményeket kell felidézni.

tesen a tanító vagy egy másik gyerek tevékenységének megfigyelése. A tanulóknak maguknak kell mérniük. Például a térfogat úrtartalomra visszavezetett mérését nem kell okvetlenül szögletes testekre korlátozni. Akkor van igazán jelentősége a térfogat közvetlen mérésének, ha nem szabályos alakú a test, így hosszmereteiből nem számítható a térfogata. Konkrétan, egy almát tekintve (amelynek alakja nyilván szabálytalan) a következő eljárás jól használható: üvegbe vizet kell tölteni, és a vízszint állását zsírkértaival vagy ragasztószalaggal megjelölni, majd az almát behelyezve a víz szintjét újra megjelölni. A két szintmagasság különbségével egyenlő mennyiségű víz térfogata (ennyi az alma térfogata) mérőhengerrel pontosan megmérhető.

Síkidom (négyzet, téglalap) területének, test (kocka, négyzetes oszlop, téglatest) felszínének számítása gyakran más eredménnyel sikerül tanítványainknak abban az esetben, ha közöljük az adatokat, mint akkor, ha a síkidomot, illetve a testet adjuk a kezükbe, és a számításhoz szükséges méréseket is nekik kell elvégezniük. Pedig tényleges problémaként a mindennapi életben általában csak a másodikként említett eljárás fordul elő. A tapétázandó felületre nincsenek ráírva a méretei. Amikor egy edény úrtartalma kérdéses, akkor nyilván még azt is nekünk kell eldönteni, hogy kiszámításához mit kell megmérnünk.

A mindennapi élet problémáit tekintve a mennyiségek folytonosan változnak, egy-egy konkrétan meghatározott részüket mindig csak a mérési pontosságnak megfelelő hibahatáron belül lehet kijelölni, tökéletesen sohasem. A legfontosabb alapmennyiségeket tekintve (ezek valamennyi mértékegységrendszernek alapmennyiségei) az idő és a hosszúság folytonos volta nem csak gyakorlati szinten, hanem elméletileg is vitathatatlan. A diszkrét pontokkal szakaszolt folytonos mennyiségekkel kapcsolatos matematikai problémák vizsgálata, megoldása a tanulók problémamegoldó képességének fejlesztéséhez eredményesen használható.⁽⁴⁾ Az alapfokú matematika oktatásakor egymást követő egyenlő időtartamok, távolságok vizsgálatának gyakorlatias esetei,

illetve néhány olyan komolyabb probléma kerülhet szóba, amikor a szakaszolás nem egyenletes. Például a hosszúság egyenlő szakaszokra történő osztásával kapcsolatos feladatoknak az a lényege, hogy a szakaszok száma eggyel több az osztópontok számánál, ha az eredeti távolság végpontjait nem számítjuk, illetve eggyel kevesebb, ha a két végpont is figyelembe veendő a feladat megfogalmazása szerint.

Időpont és időtartam

Nincs még egy olyan mennyiség az általános iskola matematika tananyagában, amelynek mérése, mértékegységeinek ismerete tanítványaink mindennapi életvitelére szempontjából annyira fontos volna, mint az idő (időpont), illetve az időtartam. Tanítványaink többsége az idő mérését, mértékegységeit családi körben tanulja meg, gyakran már a tantervben ütemezett időpont előtt. Viszont az időpont meghatározásának, az időtartam kiszámításának megtanulása a gyenge képességű, valamint a hátrányos helyzetű (különösen a halmozottan hátrányos helyzetű) gyerekek esetében általában az iskolában történik. Másrészt a számjegy kiírású kvarcórák elterjedésével még a hátrányos helyzetűnek nem tekinthető gyerekek iskolán kívüli tapasztalatai, előzetes ismeretei is egyre egyoldalúbbak.

Az időtartam mérésére, időtartamok összehasonlítására bármilyen periodikusan ismétlődő változás megfelel. Kvalitatív összehasonlításhoz az azonos időpontban kezdődő vagy végződő időtartamok esetén még mértékegységet sem szükséges választani. Nyilván az azonos időpontban kezdődő (végződő) időtartamok közül az a nagyobb, amelyik tovább tartott (előbb kezdődött).

Az időtartam mindig két időpont különbsége, ezért néhány kerek időtartamtól eltekintve (egy év tizenkét hónap, fél év hat hónap, egy hét hét nap, egy nap huszonegy óra, fél nap tizenkét óra stb.) az időtartam meghatározását mindig időpontok mérésére kell visszavezetni. A különböző tevékenységek elvégzéséhez, különböző változások (például természeti jelenségek) be-

következéséhez szükséges időtartamok összehasonlítása mellett különböző időpontok megadásának (felismerésének, óra számlapjáról történő leolvasásának) a megtanítása, készség szintig történő gyakoroltatása a témárészlet feldolgozásának első szakasza.

Az óra számlapjának beosztását, a mutatók (csak az óra- és a percmutató) mozgásának értelmezését közvetlenül követheti a különböző időpontok leolvasásának gyakorlása. A fokozatosság didaktikai alapelve itt két szinten, egymással párhuzamosan realizálható. Az órák számlapja és mutatói szerint, valamint a meghatározandó időpont szerint. Először arab számjegyekkel 1-től 12-ig számozott, csak óra- és percmutatók óráról, a mutatókat ekkor még csak kismutatónak és nagymutatónak nevezve. Majd rendre olyan órákról, amelyek számlapja római számokkal számozott I-től XII-ig, amelyek számlapján arab, majd római számokkal, de csak a 3, 6, 9, 12 van feltüntetve; amelyen semmilyen számjegy sem szerepel, legvégül nem 60, hanem csak 12 egyenlő részre legyen osztva a kör kerülete, és becsülni

kelljen a nem ötre vagy nullára végződő percek, másodpercek. Amikor másodpercmutatót óráat kezdünk használni, akkor célszerű a nagymutató–kismutató elnevezések használata mellett az óramutató–percmutató kifejezéselvet is használni. Természetesen ilyen sok fajta órával egyetlen tanító sem rendelkezik. Pedig az nyilvánvaló, hogy tanítványainknak a gyakorlati életben nem csak egyfajta számlapú óráról kell majd leolvasniuk a pontos időt. Másrészt a szemléletesség didaktikai alapelvének érvénye-

sítése is a különböző számlapú órák használatát indokolja.

A szemléletességnek, vagyis a dolgok és jelenségek közvetlen megismerésének elve a verbalizmus elleni küzdelem során pedagógiai közgondolkodásunk közhelyévé vált. Szinte szállóige már, hogy a „képtelen” tanulás életképtelen tudáshoz vezet. A gazdag tapasztalatokkal rendelkező emberek – akik mögött gazdag tevékenység áll, sokat láttak az életben (természetesen nem csak a szemükkel), megfelelően képzettek – tanul-

hatnak csak könyvekből is, mégpedig annál inkább, minél közelebb van ezeknek a könyveknek a tartalma saját tapasztalataikhoz. Viszont a tanulóknak, ha bármit is meg akarunk tanítani – különösen, ha elvárjuk, hogy ezt a tudást az életben sokoldalúan alkalmazzon is tudják –, akkor előbb megfelelő tapasztalatokat kell biztosítanunk. Ezek a tapasztalatok annál értékesebbek, minél szélesebb körű a forrásuk. Használhatunk olyan méretű csörgőórát, amelynek számlapja és mutatói a tanterem távolabbi részeiből is jól láthatók. A különböző óralapokat írás-

*Szinte szállóige már,
hogy a „képtelen” tanulás életképtelen
tudáshoz vezet.
A gazdag tapasztalatokkal rendelkező
emberek
– akik mögött gazdag tevékenység áll,
sokat láttak
az életben (természetesen
nem csak a szemükkel), megfelelően
képzettek – tanulhatnak csak
könyvekből is, mégpedig annál
inkább, minél közelebb van ezeknek
a könyveknek a tartalma saját
tapasztalataikhoz. Viszont
a tanulóknak, ha bármit is meg
akarunk tanítani – különösen, ha
elvárjuk, hogy ezt a tudást
az életben sokoldalúan alkalmazni is
tudják –, akkor előbb megfelelő
tapasztalatokat kell biztosítanunk.*

vetítő transzparenszek készítésére szolgáló faliórára felrajzolva, a mutatókat színes (kék, zöld, esetleg piros) átlátszó műanyag fóliából (irattartókból) kivágva és patentkapoccsal az alapfóliára kapcsolva, a pontos idő leolvasását az egész osztállyal egyidejűleg gyakoroltathatjuk. Célszerű egy kis fóliakorongot az alapfólia és a mutatók közé tenni, hogy az összekapcsolt fóliák forgatás közbeni esetleges sérülését elkerüljük. A meghatározandó (leolvasandó) időpont szerinti fokozatosságot tekintve egész órákkal kezd-

ve, fél-, negyed-, háromnegyed órákkal (például fél kilenc, negyed nyolc, háromnegyed tíz stb.) folytatva, ötten osztható percek tartalmazó időpontokon keresztül célszerű a percnyi pontosság megkövetelése. Ezt követheti az időpontok másodperc pontossággal történő leolvasása. Ugyanazt az időpontot különböző megfogalmazásban is célszerű gyakorolni. Például: Nyolc óra húsz perc. Negyed kilenc múlt öt perccel. Fél kilenc lesz tíz perc múlva.

A rádió, a televízió műsorát, tömegközlekedési eszközök menetrendi adatait, különböző intézmények félfogadási, üzletek nyitvatartási időszakát 24 órás időbeosztás szerint adják meg. Az órák számlapján viszont általában csak 12 órának megfelelő beosztás van. A 12 óra utáni napszakokban (délutáni, esti időpontokban) is értelmeznünk és gyakoroltatnunk kell az időpont megadását. Ez olyan ismeret, amelyet már alsó tagozatban minden tanítványunkkal a készség-szint eléréséig indokolt gyakoroltatni. Gondoljunk arra, hogy tanítványainkat milyen kellemetlen élethelyzetektől kíméljük meg, ha a 12 óra utáni napszakokban nem másról kell megkérdezniük egy műsor kezdésének időpontját, tömegközlekedési eszközök indulásának, érkezésének időpontját stb.

Az időpont különböző napszakokban való meghatározását olyan hétköznapi problémával kezdhetjük, mint például annak megbeszélése, hogy a rádióban miként mondják be a délutáni, esti időpontokat. Rádióműsorokban viszonylag könnyű olyan időpontokat találni, amelyek éppen 12 óra eltéréssel kezdődő műsorokra vonatkoznak. Ilyen táblázat elemzésével jól kiegészíthetjük azt a problémafelvetést, amikor például azt kérjük a gyerekektől, hogy állítsák az óra mutatóit reggel negyed kilenc előtt öt percre és este nyolc óra tíz percre. Amikor már megértették, hogy a déli 12 óra utáni időpontokat úgy adjuk meg, hogy az óráról leolvasott értékhez még hozzáadunk 12 órát, akkor a gyakorlásra szánt feladatok időpontra vonatkozó kérdése egyszerre két napszakra is vonatkozhat.

Az üzletek, könyvtárak nyitvatartási adatainak, hivatalok ügyfélfogadási rendjének, tömegközlekedési eszközök járatsűrűségé-

re vonatkozó adatoknak a felhasználásával jó néhány gyakorlatias feladat tűzhető ki az időpont különböző napszakokban történő meghatározásával kapcsolatban. A nyitvatartási, félfogadási időszakokat, a járművek követési rendjét megadva eldöntendő problémaként olyan kérdéseket tehetünk fel, hogy nyitva van-e az üzlet, a könyvtár, van-e félfogadás bizonyos időpontokban. Gyakorlatias feladatok készíthetők a postai keletbélyegző-lenyomatok (pecsétek) felhasználásával. Természetesen a keletbélyegző-lenyomatokról leolvasható adatok, ezért a kérdésként feltehető adatok sem kizárólagosan a kezelés (lebélyegzés) időpontjára vonatkozhatnak.

Az időpont és az időtartam fogalmának elkülönítése nem könnyű feladat. A mindennapos szóhasználatban legtöbbször csak a szöveggörnyezet alapján dönthető el, hogy az „idő” fogalma időpontra vagy időtartamra vonatkozik-e.

Nyilván beszélnünk kell arról is, hogy az éjfél, hajnal, reggel, délelőtt, dél, délután, este, éjszaka kifejezések közül melyek jelennek időpontot és melyek napszakokat.

Mivel az időtartam mindig két időpont különbsége, könnyen számolási problémává válhat a feladat. A napnál kisebb egységek esetén fontosnak tartom, hogy legalább egy óráról való leolvasás is része legyen valamennyi kitézőt feladatnak. Amikor nem hat túlságosan erőltetettnek, akár mindkét időpont is tényleges leolvasás (mérés) eredménye lehet.

A matematika tananyagában nagyon sok olyan gondolatmenettel megoldható probléma található, amelyek fordított sorrendben is felvethetők, végigjárhatók. E ténynek a megértés-fejlesztésben természetes helye, szerepe van matematikatanításunk minden napjaiban. Az időpont és az időtartam mérésnek ilyen jellegű didaktikai bizonytalansága miatt úgy érzem, e kérdésben is illendő állást foglalnom. Lényegében a tanulók óramodelljein a tanító által megadott időpontok beállításának, időtartamok követésének, órák számlapjaira a mutatók berajzolásáról van szó. Ébresztőórán a csörgőmutató beállításának gyakorlatias volta nyilván vitathatatlan. A többi mutatóval kapcsolatban pe-

dig csak egyetlen példa: Negyedóra múlva kezdődik az előadás, akkor hogyan helyezkednek majd el az óra mutatói?

A pénzhasználat gyakorlása

A pénz is mennyiség, 72 Ft-ot tekintve 72 a mérőszám, Ft a mértékegység. A matematika-tanterv ennek a gyakorlatias problémakörnek nem szentel elegendő figyelmet. Meggyőződése, hogy a jelenleginél többször indokolt különösen az alsó tagozatos matematikaórákon a pénzhasználat gyakorlásával foglalkozni.

Pénzérték és a bankjegyek (játékpénz formájában, illetve hivatkozásként történő) általánosan elterjedt alkalmazására közismert, rendszeresen alkalmazott alaptípusok:

- kombinatorikai problémák vizsgálata, kirakása pénzértékkel;
- valószínűségi kísérletek végzése pénzértékkel;
- helyiérték szemléltetése, beváltások, tízes átlépéskor (százás átlépéskor, ezres átlépéskor), írásbeli műveletek tanításakor;
- vásárlásra vonatkozó szöveges feladatok az alpműveletek gyakorlására.

A pénzhasználat gyakorlását célszerű összekötni a mindennapi élet táblázatainak használatával. Például:

- különböző árjegyzékek;
- vasúti, távolságautóbusz-menetdíj táblázatok;
- postai szolgáltatások díjtáblázatai.

Belépőjegyek, menetjegyek adatainak értelmezése is természetes része lehet a gyakorlati problémákat feldolgozó matematikaóráknak (a jegyek kivétítése epidiaszkóppal oldható meg).

Természetesen a pénzértéknek nemcsak az értékét, hanem fizikai adatait (tömegét, vastagságát, átmérőjét) is összehasonlíthatjuk. Amikor a pénzeket hasonlítjuk össze, előtte tisztázni kell, hogy milyen tulajdonságát (mennyiségét) vizsgáljuk, milyen mennyiség szerint hasonlítjuk össze. Csak a legkézenfekvőbb lehetőségeket említve:

- értékük szerint;
- darabszámaikat összehasonlítva;
- tömegük mérőszámát tekintve;
- térfogatukat összehasonlítva.

A pénzérték átmérője lefedéssel, azaz egymásra helyezéssel könnyen összehasonlítható. Az érték vastagságának és tömegének összehasonlítása már nem ilyen egyszerű. A kis mennyiségek mérésének, a mérési hiba csökkentésének szokásos módszere a mérendő mennyiség többszörösének együttes mérése. Nyilván egy pénzérték vastagságát vonalzóval nem lehet pontosan megmérni. Viszont például tíz darab húszforintos vastagságát megmérve, majd az eredményt tízzel osztva, már jóval pontosabb értéket kapunk. Hasonló elv alapján végezhetjük kis tömegű tárgyak tömegének mérését (például a kanadai nikkeltől vert új tízforintos 8,83 gramm tömegű), periodikusan ismétlődő rövid időtartamok meghatározását.

Felkészítés az önálló életvitelre

A mindennapi problémahelyzetek megoldását sokfajta matematikai tevékenységhez kapcsolva gyakoroltathatjuk tanítványainkkal.

A mindennapi élet matematikája részben a gazdálkodás matematikája is. Nem elegendő, ha a szöveges feladatoknál csupán a költségekkel kapcsolatos problémákat vizsgálathatjuk (vásárlás, üdülés, utazás stb.), de ezt nem kötjük össze azzal, hogy miből mennyire futja, hogyan kell összerakni a pénzt, hogy valami nagyobb kiadásra teljék. A gazdálkodáshoz kapcsolódó fogalmak, mint tartozás, követelés, egyenleg, hitel, kamat, kölcsön, számla, költségvetés, nyugta – hogy csak hirtelenében a legismertebbeket soroljam – mind hasznos és egyre fontosabb tudnivalók. Arra is meg kell tanítani növendékeinket, hogy gazdálkodásukról feljegyzéseket tudjanak vezetni, háztartási „költségvetési” könyvet, amelybe bevételeiket és kiadásait feljegyzik és amelynek segítségével tervezhetnek.

Például, ha a konyháját kerámia lapokkal szeretné burkolni a család, nemcsak azt kell tudni, hány darab kell, hanem azt is, milyen árban kaphatók, amelyek tetszenek és megfelelőek, azokból mennyibe kerül a teljes felület befedése, valamint azt is, hogy

mennyiert vállalja a lerakást az iparos. De talán hozzátehetünk egy olyan ajánlatot is: mikor kerül kevesebbe? Ha kerámialapokból, vagy ha PVC borítóanyaggal fedjük be a konyha padlózatát. Tapétázáshoz a felület kiszámítása (szükséges tapéta mennyiségének meghatározása céljából) mellett költségvetés készítése is feladat lehet.

Különböző gyakorlatias feladatokat fogalmazhatunk meg a postai szolgáltatások igénybevitelével kapcsolatban. Elegendő példányban (költségmentesen) beszerezhetők a takarékbefizetési (-visszafizetési) bizonylatok, a belföldi postautalványok, az ajánlott küldemény feladóvenvényei, a táviratlapok, a belföldi távirati utalványok, a belföldi csomaghoz való szállítólevelek, esetenként még az átutalási postautalványok is. Ezek kitöltésének gyakorlása is hasznos a mindennapi életre való felkészüléshez.

A vasúti- és autóbuszmenetdíj-táblázatokat felhasználhatjuk utazással kapcsolatos feladatok megoldásakor. Egy-egy utazási terv elkészítéséhez térkép-vázlat (illetve valóságos térkép), táblázatok (menetrend, menetdíj) használata, költség-számítások kapcsolhatók. Például egy vonatúttal kapcsolatban célszerű a tanulókkal beszélni arról, hogy az érdemi döntést mindig az befolyásolja, minek tulajdonítunk nagyobb jelentőséget a következő feltételek közül:

- az útvonal hossza (a menetjegy ára miatt lényeges);
- az utazás időtartama (esetenként a rövidebb útvonal megtétele hosszabb ideig is tarthat: csatlakozások, átszállások miatt, gyors-, illetve személyvonattól függően);
- az átszállások száma (kényelmi szempont).

Munkabérszámítások, háztartási költségvetés készítése, átutalási betétszámla-kivonatok értelmezése is bekerülhet a matematikaórán végzett tevékenységek közé. Kár volna olyan megfontolásból, hogy „a felnőttek között is szép számmal találhatók olyanok, akiknek gondot jelent a bérszállagjukon való eligazodás, a bankszámlakivonataik értelmezése”, mellőznünk az ilyen típusú feladatokat. Sőt, éppen azért kell ilyen feladatokkal foglalkoznunk, hogy tanítványaink között minél kevesebben le-

gyenek olyanok, akiknek majdan ilyen nehézségei lesznek.

Helymeghatározás, tájékozódás vonalon, síkban, térben

A természettudományos ismeretszerzés területén vizuális élményeken és konkrét tapasztaláson, mint empirikus bázison alapuló logikus gondolkodásra kell nevelnünk. A nyelvi kifejezőkészség fejlesztése, fontosságának elismerése mellett alapvető szerepe van a mindennapi életben a nem nyelvi szimbólumoknak, s ezek közül is főképp a vizuális szimbólumoknak: képeknek, ábráknak, piktogramoknak, diagramoknak, táblázatoknak. A képi megjelenítés, a matematikai fogalmak, struktúrák rajzokkal, sémákkal, jelekkel történő megadása elősegíti az összefüggések megértését. A vizuális megjelenítés hozzájárulhat a konkrét és az absztrakt fogalmak közti távolság áthidalásához. Ezért fontos, hogy a természet tárgyait, jelenségeit környezetükkel együtt, szerkezeti, formai, színbeli valóságában szemléltessük. Ugyanis a vizualitás „látni” tanít, nem bonyolult matematikai függvényekkel leírható törvények megadásával, hanem képekben fogalmazza meg a valóságot. A képi megjelenítés, a matematikai fogalmak, struktúrák rajzokkal, sémákkal, jelekkel történő megadása elősegíti az összefüggések megértését.

A tanulók konkrét lakókörnyezetéről célszerű néhány valóság-hű térkép-vázlatot készíteni írásvetítő föliára (az üzletek, a közintézmények feltüntetésével), és a térbeli, az időbeli orientáció gyakorlását, a térkép-vázlatok olvasását, a folyamatábrák készítését együtt gyakorolni. Kitűzhetők olyan feladatok, amelyekben a megtett út kiszámítását egyéb praktikus ismeretekkel, így a térkép-olvasással, a közúti jelzőtáblák értelmezésével kötik össze. Nagyon tanulságos a különféle információhordozók értelmezése a matematika nyelvén.

A mindennapi gyakorlatban leggyakrabban előforduló piktogramok a közúti közlekedés jelzőtáblái, amelyek felhasználása vitathatatlanul indokolt a vonalon, síkban, térben való tájékozódással foglalkozó téma-

részletek alkalmazásakor. A térkép-vázlatok használatát, útjelző táblák értelmezését (piktogramok) távolságok összehasonlítását (nagysági reláció) és számtani alpművelet (kivonás) gyakorlását is segítheti azoknak a feladatoknak a kitűzése, amelyeknél a számításokhoz szükséges adatokat a tanulóknak a térkép-vázlatról, illetve közúti jelzőtáblákról kell a megoldáshoz leolvasniuk.

Folyamatábrák felhasználásával különböző folyamatok vizsgálatát is a matematikaórák fejlesztő tevékenységei közé sorolhatjuk.

Római számok

A római számírás csak tananyagként szerepel az általános iskolában feldolgozásra kerülő matematikai ismeretek között. Viszont egyik osztályban sem követelmény. Ennek ellenére a római számírás az emberi kultúra olyan lényeges rekvizituma, amelynek mellőzése vétek volna. Sőt a mindennapi gyakorlatban is megtalálhatók a római számok. Például a hónapok jelölésére, Budapest kerületeinek megkülönböztetésére használatosak, órák számlapja gyakran készül római számokkal, s a műemlékek feliratai is tartalmaznak római számokat. Az olimpiák sorszáma, az emberiség történetének századait is többnyire még római számjegyekkel írjuk. A tantervi követelményektől függetlenül – szerintem – a matematikát tanítók pedagógiai felelősségébe tartozik, hogy ne legyen olyan tanítványunk, aki úgy lép át a XX. századból a XXI. századba, hogy azt le sem tudja írni a hagyományos módon.

A jelek helyének a római számírásban is van szerepe, de ez nem olyan helyiérték-rendszer, amely az alpműveletek (különösen a szorzás és az osztás) elvégzésére egyszerű algoritmus megfogalmazását lehetővé tenné. Ez a magyarázata annak, hogy a római kultúrának az európai kultúra fejlődésére való erőteljes hatása ellenére napjainkban a római számok már csak mint sorszámnevek játszanak szerepet. Viszont a helyiérték-rendszer előnyeinek szemléltetésére jól használhatók.

Célszerű megvizsgálni a tízeseknek és a százásoknak az egyesekével analóg képzését:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC
C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM

Ez az analógia csak a számok képzésére vonatkozik, az elrendezésbeli hasonlóság nem elég a számrendszerek mai helyiérték-fogalma követelményének kielégítéséhez. Ezért reménytelenül nehéz akár csak egy egyszerű szorzás elvégzése is római számokkal.

Az alpműveletek elvégzésétől függetlenül is lényeges előnyei vannak a helyiérték-rendszer alkalmazásának. Ezt néhány szám római és arab számjegyekkel való felírásával könnyen megmutathatjuk a tanulóknak:

MCCCLXXXIV	MMMCCXXXVIII	MMMCMXLVII
1384	3238	4947

Motivációs célra is alkalmas a római számokkal való foglalkozás. (5) Nagyon szeretik a gyerekek a római számokkal megadott fejtörőket. Az egyik típus például az, amikor egy-egy pálcika (gyufaszál) átrakását tűzzük ki feladatul. Úgy kell áthelyezni a pálcikákat, hogy az egyenlőség (esetleg egyenlőtlenség) igaz legyen.

Kódjel számok

A mindennapi életben a számokat személyek, tárgyak, dolgok jelölésére is használjuk. Sok olyan alkalom fordul elő, amikor a szám nem darabszámot, nem mérőszámot, nem is valamilyen szempont szerinti rendezettséget (sorszámot) fejez ki. Csupán egy személyt, egy tárgyat, egy dolgot jelöl, azaz megkülönböztethetővé teszi a megjelölt személyt – tárgyat – dolgot, nevet ad neki. Így ezek a számok, a kódjel számok információhordozóként kezelhetők. Ennek a számítógépes adatfeldolgozás során lényeges előnyei vannak. Ilyen számok például: a személyi számok, az adószámok, a társadalombiztosítási azonosítószámok, a telefonszámok, a postai irányítószámok, a házszámok, az autók rendszáma, a sportolók rajtszáma, a TV- és rádióadók száma. A kódjel számok használata a XX. század kultúrájának természetes része, mert alkalmazásukkal a megjelölés kimeríthetetlen, és (helyes alkalmazás esetén) egy jól áttekinthető rendszer áll rendelkezésünkre.

A fél tucatnál több számjegyet (karaktert) tartalmazó kódjel számoknál a számítógépes adatfeldolgozás lehetőségeit kihasználva rendszerint az utolsó számjegy (egyesekek helyiértéke) ellenőrző szám. A kódjel szám többi számjegyéből képzett ellenőrző szám alkalmas arra, hogy megfelelő ellenőrző program futtatása esetén a számítógép azonnal jelezze az esetleges téves adatbevitel tényét. Talán mivel ez az ellenőrző szám biztonsági funkciót is betölt, azért kódjel szám fajtánként más-más algoritmus szerint képezhető. Az ellenőrző számok képzési algoritmusának ismeretében konkrét számítási feladatokat is kitűzhetünk a tanulóknak. A következőkben néhány ilyen algoritmust ismertetek.

A személyazonosító jel (személyi szám) tizenegyedik, azaz ellenőrző számjegyét úgy kell képezni, hogy az első tíz számjegy mindegyikét szorozni kell azzal a sorszámmal, ahányadik helyet foglalja el a személyazonosító jelen belül. (Első számjegy szorozva eggyel, a második számjegy szorozva kettővel, a harmadik számjegy szorozva hárommal és így tovább.) Az így kapott szorzatokat össze kell adni és az összeget tizeneggyel osztani. Az osztás maradéka a tizenegyedik számjeggyel, az ellenőrző számjeggyel lesz egyenlő. Az azonos napon születettek megkülönböztetésére szolgáló nyolcadik, kilencedik, tizedik helyen álló (születési sorszámnak tekinthető) háromjegyű szám közül azt nem szabad kiadni, amelynél a fenti módszer szerinti tizeneggyel való osztásnál a maradék tíz lenne.

A társadalombiztosítási azonosító jel (TAJ szám) egy kilenc számjegyből álló szám, amelyben az első nyolc számjegy egy folyamatosan kiadott egyszerű sorszám, amely mindig az előző, utoljára kiadott sorszámból egy hozzáadásával keletkezik. A kilencedik számjegy ellenőrző szám, úgynevezett CVD kód, amelynek képzési algoritmus a következő: A TAJ szám első nyolc számjegyéből a páratlan helyen állókat hárommal, a páros helyen állókat héttel szorozzuk, és a szorzatokat összeadjuk. Az összeget tízzel elosztva a maradékot tekintjük a kilencedik számnak, azaz CDV kódnak.

A bankszámla megjelölésére szolgáló pénzforgalmi jelzőszám (közismert elnevezéssel: bankszámlaszám) 16 (kétszer nyolc), vagy 24 (háromszor nyolc) karakter hosszúságú – csak numerikus karaktereket, azaz csak számjegyeket tartalmazó – számsor. Az első nyolc karakter mindig a hitelintézet (közismert elnevezéssel: a bank) azonosító száma. Ebből az első három számjegy a hitelintézet egyedi azonosító száma, amelyet az MNB (Magyar Nemzeti Bank) határoz meg részére, a következő négy számjegy a hitelintézeti fiókot azonosító szám, amellyel a bank különbözteti meg fiókjait és számlavezető helyeit, a nyolcadik számjegy az ellenőrző szám. A második, illetve a második és harmadik nyolc karaktert tartalmazó pozíció belső tartalmát a hitelintézet egyedileg határozza meg, a számlatípusok, valamint az egyes számlatípusokon belül a számlatulajdonosok megkülönböztetésének céljából. Mindkét változatnál az utolsó számjegy (a tizenhatodik, illetve a huszonegyedik) az ellenőrző szám. Az ellenőrző számok képzésének (mindegyik bankszámlaszám két ellenőrző számot tartalmaz) algoritmus a következő: külön az első hét, valamint külön a kilencediktől a tizenötödikig, vagy a huszonharmadikig a számjegyeket helyiértékük csökkenő sorrendjében szorozzuk a – 9, 7, 3, 1, ..., 9, 7, 3, 1 számokkal, a szorzatokat összeadjuk, és az eredmény egyes helyiértékén lévő számot kivonjuk tízből. A különbség az ellenőrző szám, azzal a kiegészítéssel, hogy amikor a különbség tíz, akkor az ellenőrző szám nulla.

Magánszemély adóazonosító jele (adószáma) tízjegyű szám, amelynek első számjegye mindig nyolcas (ez utal az adóalany magánszemély voltára), a következő öt számjegy az adóalany születési időpontja és az 1867. január elseje között eltelt napok száma, a következő három számjegy az azonos napon születettek megkülönböztetésére szolgáló véletlenszerűen képzett sorszám, míg a tizedik számjegy az ellenőrző szám. Az adóazonosító jel (adószám) tizedik, azaz ellenőrző számjegyét úgy kell képezni, hogy az első kilenc számjegy mindegyikét szorozni kell azzal a sorszámmal, ahányadik helyet foglalja el a személyazonosító jelen belül.

(Első számjegy szorozva eggyel, a második számjegy szorozva kettővel, a harmadik számjegy szorozva hárommal és így tovább.) Az így kapott szorzatokat össze kell adni és az összeget tizeneggyel osztani. Az osztás maradéka a tizenegyedik számjeggyel, az ellenőrző számjeggyel lesz egyenlő. Az azonos napon születettek megkülönböztetésére szolgáló hetedik, nyolcadik, kilencedik helyen álló (születési sor-számnak tekinthető) háromjegyű szám közül azt nem szabad kiadni, amelynél a fenti módszer szerinti tizeneggyel való osztásnál a maradék tíz lenne.

A számológépek (kalkulátorok) használatáról

A Nemzeti alaptanterv műveltségi területei közül az informatika számítástechnikára vonatkozó részében szerepel a számológépek használata tananyagként: – Számolás kalkulátorral, minimális teljesítményként a 6. évfolyam végén: A műveletvégzés helyes sorrendje a kalkulátoron, általános fejlesztési követelményként: – Legyen képes az adott probléma megoldásához kiválasztani az általa ismert módszerek és eszközök közül a megfelelőket. Konkrétan 1–6. évfolyamon: Találkozzon problémákkal, melyeket kalkulátorral, számítógépes (oktató) programokkal tud megoldani, (6) így a matematika műveltségi területe, hasonlóan a még részben hatályos matematika tantervekhez (7) ezt a tevékenységet nem is említi. Viszont a matematika anyagában a nagy számokkal végzett alpműveletekre vonatkozóan szükségesnek tartom megjegyezni, hogy mivel

egyre több tanítványunknak van és lesz ilyen készüléke (ha másként nem, hát elektronikus játékhhoz kapcsolva vagy kvarcórával egybeépítve), indokolt állást foglalni a kalkulátorok matematika órán való használatáról. Esetenként az írásbeli műveletek eredményei kalkulátorral történő ellenőrzésének megengedése – tantárgyak (már-mint a informatika és a matematika) közötti koncentrációnak is tekinthető. Sőt, uram bocsá', ha netán van olyan tanítványunk, akit képtelenek vagyunk megtanítani ötjegyű számokat kétjegyű osztóval hibátlanul osztani, akkor talán mégis jobb, ha számológépen ki tudja „nyomkodni”, mint ha egyáltalán nem tudja.

Jegyzet

(1) *Nemzeti alaptanterv*: Művelődési és Közoktatási Minisztérium 1995., 8–9. old.

(2) 1. alatt i.m. 71–72. old.

(3) DR. AMBRUS ANDRÁS: *Matematikai irányzatok Kárteszi professzor kommentárjaival II.* A Matematika Tanítás, 1987. 2. szám, 40. old.

(4) TAKÁCS GÁBOR: *Folytonos mennyiségek szakaszolásával kapcsolatos matematikai problémák.* Módszertani Közlemények, 1997. 3. sz. 122–125. old.

(5) TAKÁCS GÁBOR–TAKÁCS GÁBORNÉ: *A tanulói motiváció erősítése az alpfokú matematika tanításában.* A Matematika Tanítása, 1988. 3. szám, 65–75. old.

(6) 1. alatt i.m. 210–211. old.

(7) C. NEMÉNYI ESZTER: *Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához 1–4. osztály.* Első rész. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1986.

NOVÁK LÁSZLÓNÉ: *Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához 5–8. osztály.* Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1987.

Takács Gábor